TRABAJO PRÁCTICO 4-4 **A.M. II - 2013**

INTEGRALES DE SUPERFICIE

ÁREA DE UNA SUPERFICIE ALABEADA

Se pueden utilizar cualquiera de las dos expresiones

$$A = \iint_D \frac{|\nabla \varphi|}{|\nabla \varphi \bullet \vec{p}|}\, dA \quad \text{para } \varphi(x, y, z) = c$$

$$A = \iint_{D_{xy}} \sqrt{f_x'^2 + f_y'^2 + 1}\, dA \quad \text{para } z = f(x, y)$$

Ejercicio 1. Halle el área de la porción de superficie S

a) S: plano $2x + 3y + 6z = 12$ en el primer octante

b) S: semiesfera con C (0, 0, 0), radio a con $z \geq 0$.

INTEGRAL DE SUPERFICIE DE CAMPO ESCALAR

$$I = \iint_D g(x, y, f(x, y)) \frac{|\nabla \varphi|}{|\nabla \varphi \bullet \vec{p}|}\, dA$$

Ejercicio 2. Evalúe $\int_S g(x,y,z)d\sigma$

a) $g(x, y, z) = (\frac{xy}{z})$ S: $z = x^2 + y^2$; $4 \leq x^2 + y^2 \leq 16$

b) $g(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ S : $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ limitada por $x^2 + y^2 \leq 4$

Ejercicio 3. Halle el flujo de $\vec{F}$ a través de S:

a) $F(x; y, z) = 3z\,\hat{\imath} - 4\,\hat{\jmath} + y\,\hat{k}$ S: $x + y + z = 1$ en el primer octante

b) $F(x, y, z) = 4xy\,\hat{\imath} + z^2\,\hat{\jmath} + yz\,\hat{k}$ S: cubo limitado por x = 1; z = 1; y = 1 y los planos coordenados.

Ejercicio 4. Hallar la masa de una lámina plana $2x + 3y + 6z = 12$ en el primer octante cuya densidad es $r = x^2 + y^2$.

TEOREMAS DE CAMPOS VECTORIALES

TEOREMA DE LA DIVERGENCIA O DE GAUSS

Si $\vec{F}$ es un campo vectorial continuo en los puntos de una superficie cerrada S orientable que encierra una región conexa D, y existe (div $\vec{F}$) en D entonces se cumple:

$$\oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma = \iiint_D (div\vec{F}) dV$$

TEOREMA DEL ROTOR O DE STOKES

Si $\vec{F}$ es un campo vectorial continuo en una curva C (cerrada, simple, regular) y existe (rot $\vec{F}$) en una superficie S orientable que tiene como contorno a C, entonces se cumple :

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot\vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma$$

Ejercicio 6. Verifique el teorema de la divergencia evaluando la integral de superficie y la integral triple:

$F(x, y, z) = 2x\,\hat{\imath} - 2y\,\hat{\jmath} + z^2\,\hat{k}$ S es el cubo limitado por x = 0, x = a, y = 0, y = a, z = 0, z = a

---

Ejercicio 7. Utilice el teorema de la divergencia para calcular el flujo de $\vec{F}$ a través de S:

a) $F(x, y, z) = xy\,\hat{\imath} + yz\,\hat{\jmath} - yz\,\hat{k}$ S: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $z \geq 0$

b) $F(x, y, z) = xyz\,\hat{\jmath}$ S: $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$, $z = 4$

Ejercicio 8. Verifique el teorema del rotor evaluando la integral curvilínea y la integral de superficie para:

$F(x, y, z) = (-y + z)\,\hat{\imath} + (x - z)\,\hat{\jmath} + (x - z)\,\hat{k}$ S: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ con $z \geq 0$

Ejercicio 9. Evalúe $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ aplicando teorema de Stokes si $F(x, y, z) = z^2\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + xz\,\hat{k}$ C: $x^2 + y^2 = 4$

a) para S: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

b) para S: $x^2 + y^2 = 4$; $z = 0$

c) para S: $x^2 + y^2 = 4$; $0 \leq z \leq 1$

Optativos:

Ejercicio 1. Halle el área de la porción de superficie S

S: superfície cônica limitada por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ con $0 \leq z \leq 4$

Ejercicio 2. Evalúe $\int_S g(x,y,z)d\sigma$

$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ S : $z = x + 2$; $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$

Ejercicio 3. Halle el flujo de $\vec{F}$ a través de S:

$F(x; y, z) = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$ S: $z = 9 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$

Ejercicio 4. Verificar que el momento de inercia de una capa cónica de densidad constante con respecto a su eje es $I = \frac{1}{2}Ma^2$

Ejercicio 5. Verifique el teorema de la divergencia evaluando la integral de superficie y la integral triple:

$F(x, y, z) = (2x- y)\,\hat{\imath} - (2y- z)\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$ S es plano $2x+ 4y+ 2z =12$ en el primer octante.

Ejercicio 6. Utilice el teorema de la divergencia para calcular el flujo de $\vec{F}$ a través de S:

$F(x, y, z) = xe^z\,\hat{\imath} + ye^z\,\hat{\jmath} + e\,\hat{k}$ S: $z = 4 - y$; $z = 0$; $y = 0$; $x = 6$.

Ejercicio 7. Verifique el teorema del rotor evaluando la integral curvilínea y la integral de superficie para:

a) $F(x, y, z) = xyz\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$ S: $3x + 4y + 2z = 12$ en el primer octante

b) $F(x, y, z) = z^2\,\hat{\imath} + x^2\,\hat{\jmath} + y^2\hat{k}$ S: $z = y^2$; $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq a$
